II- ТАРАУ. ТҰТАС ОРТАНЫҢ КИНЕМАТИКАСЫ

2.1. Негізгі ұғымдар және тұтас орта кинематикасының теңдеулері

2.1.1. Кеңістік және уақыт. Ортаның тұтастық гипотезасы

Координаталар деп аталынатын сандар арқылы берілген нүктелердің жиынтығын **кеңістік** деп түсінеміз. Үздіксіз сан-алуан метрикалық кеңістіктерді қарастырайық. Әрбір кеңістіктегі нүктелердің ара қашықтығы белгілі деп алатын болсақ, онда барлық нүктелерге ортақ ортогональді координаталар жүйесін ендіруге болады. Мұндай кеңістіктер **евклид кеңістіктері** деп аталады, ал осының негізінде дамытылған механика **ньютондық механика** делінеді. Тәжірибенің көрсетуі бойынша кәдімгі физикалық кеңістіктің масштабы аса үлкен болмаған жағдайда, оны евклид кеңістігі деп есептеуге болады.

Уақыт ұғымы тәжірибеге байланысты және механикаға қажетті шама. Кез келген механикалық құбылыс әрбір бақылаушының көзқарасы бойынша суреттеледі. Уақыт, жалпы айтқанда, бақылаушының есептеу жүйесіне байланысты болады. Уақыт барлық бақылаушылар үшін–поезда, самолетте, аудиторияда т.б. бірдей өтеді деп есептелінеді. Яғни **уақыт абсолют шама.**

Тұтас орта механикасында ортаның молекулалық құрылымы мен молекулалардың өзара әсер күштері ескерілмейді. Сондықтан материалдық орта өзінің алып тұрған көлемін үздіксіз тұтас толтырып, реологиялық, термодинамикалық, электрофизикалық сипаттағы интегралдық қасиеттерге ие болады. Материалдық ортаның **тұтастық** гипотезасының мәні осында.

Сонымен, жоғарыда үш іргелі гипотеза ендірілді (тұтас орта, евклид кеңістігі және абсолют уақыт). Осыларды пайдалану арқылы Ньютон механикасының негізінде деформацияланатын орта қозғалысының теориясы жасалынды.

2.1.2. Кинематика негіздері

Тұтас орта кинематикасында «нүкте» деген сөздің мағынасы қатаң түрде түсіндірілуі қажет, себебі «нүкте» кеңістікке немесе тұтас ортаға қатысты болады. «Нүкте» деген сөз қозғалмайтын кеңістіктегі орынды белгілеу үшін пайдаланылады, **«бөлшек»** – тұтас орта көлемінің **аз элементін** (немесе материалдық нүктені) білдіреді.

Кез келген t уақыттың мезгілінде, σ бетімен шектелген, көлемі V тұтас орта физикалық кеңістіктің бір бөлігін алып жатсын. Егер түзу сызықты немесе қисық сызықты координаталар жүйесінде t уақыттың мезгілінде орын алып тұрған тұтас ортаның белгілі бір көлеміндегі бөлшектердің және кеңістік нүктелерінің сәйкестігі дәлелденсе, онда тұтас ортаның осы уақыттағы **«конфигурациясы»** көрсетілген дейді.

«Деформация» деген термин континуум формасының өзгерісін, яғни бастапқы (деформацияланбаған) конфигурациядан, келесі (деформацияланған) конфигурацияға ауысуын білдіреді. Деформацияны зерттегенде тек бастапқы және соңғы конфигурациялары ескеріледі, ал континуумның аралық өзгерістеріне назар аударылмайды. Тұтас орта механикасында «деформация» терминімен қатар «ағыс» термині бар. Ол континуумның уақыт бойынша үздіксіз қозғалыс күйін сипаттауға пайдаланылады.

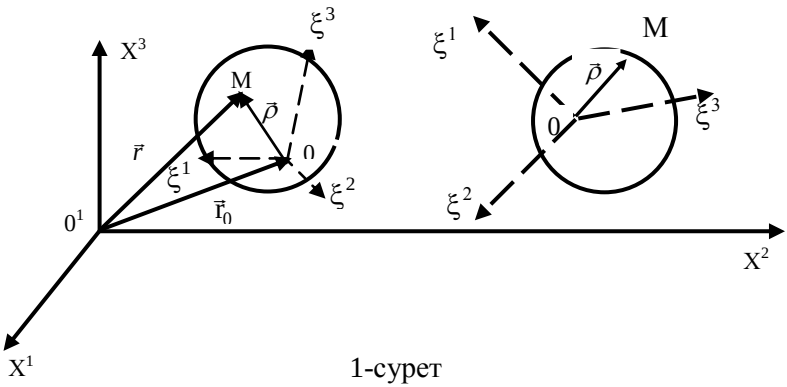
2.1.3. Абсолют қатты дененің қозғалыс теңдеулері

Тұтас орта қозғалысын қарастырғанда, теориялық механикадағыдай абсолют қатты дене (а.қ.д.) қозғалысының әдістерін пайдалануға болады.

Абсолют қатты дене қозғалысын, базисі $\vec{э}_i$ (i=1,2,3) тік бұрышты декарт координаталар жүйесіне x^i-ге қатысты қарастырайық (1 сурет).

Дененің өзінің $\vec{э}_j{}^*$ базисін қосымша тік бұрышты декарт жүйесімен ξ^k байланыстырайық. ξ^k жүйесі жылжымалы денемен, дене қозғалғанда ілесіп жүреді, сондықтанда оны **ілеспелі координаталар жүйесі** деп атайды.

Кеңістіктегі дененің орнын белгілеу үшін, ілеспелі жүйені белгілесе жеткілікті. Ол үшін осы x_0^i жүйесінің 0 бастапқы координатасы және x^i санақ жүйесіне қатысты осьтердің бағытын анықтайтын **Эйлер бұрыштарының** φ^i мәндері берілуі қажет.



1-сурет

Сонымен,

$$x_0^i = x_0^i(t), \qquad \varphi^i = \varphi^i(t) \tag{2.1}$$

теңдеулері **абсолют қатты дененің қозғалысын** анықтайды.

Егер абсолют қатты дененің қозғалысы берілсе, яғни (2.1) формуласы белгілі болса, онда абсолют қатты дененің кез келген бөлшектерінің қозғалыс теңдеуін тағайындауға болады. $\vec{r}_o$ – **полюстен шыққан радиус - вектор,** M **нүктесінің радиус**

- векторы – $\vec{r}$, ал $\vec{\rho}$ – **ілеспелі координаталар жүйесіне қатысты** М **нүктесінің радиус - векторы болсын.** Онда $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho}, \qquad x^i\ \vec{э}_i = x_o^i\ \vec{э}_i + \xi^j\ \vec{э}_j\ *$.

Ілеспелі координаталар жүйесіндегі бірлік-векторларды (орттарды) келесі түрде жіктеп көрсетуге болады

$$\vec{э}_j\ * = C_{\bullet j}^{i\bullet}\ \vec{э}_i\ .$$

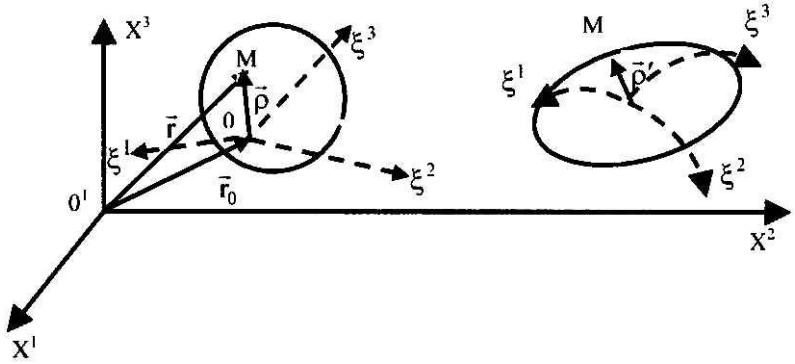
$C_{\bullet j}^{i\bullet}$ коэффициенті x^i мен ξ^k осьтерінің өзара орналасуына байланысты болғандықтан, оны Эйлер бұрышының функциясы ретінде көрсетуге болады. Бұдан

$$x^i = x_0^i(t) + C_{\bullet j}^{i\bullet}[\varphi_k(t)]\xi^i\ , \qquad (2.2)$$

абсолют қатты дене бөлшегіндегі $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ нүктесінің қозғалыс теңдеуі келіп шығады.

2.1.4. Тұтас орта қозғалысының теңдеулері

Тұтас орта кинематикасы абсолют қатты денелердің кинематикасынан айырықша ерекшелігімен өзгеше. **Ілеспелі координаталар жүйесі** ξ^1, ξ^2, ξ^3 үш өлшемді евклид кеңістігінде қозғалыс барысында **деформацияланатын қисық сызықты координаталар жүйесін** құрайды. Мысалы, уақыттың бастапқы t_0 мезгілінде тұтас ортаның нүктелерінен тұратын ортадан белгілі бір координаттық сызықтарды ξ^1, ξ^2, ξ^3 таңдап алайық. Сонда уақыттың келесі мезгілінде олар континуумның бөлшектерімен бірге қайтадан ілеспелі жүйенің координаттық сызықтарына ауысады. Егер бастапқы уақыт мезгілінде олар түзу сызықты болып алынса, онда келесі уақыт мезгілінде деформацияға сәйкес майысуы (қисаюы) мүмкін (2-сурет).



2-сурет

Сонымен, егер тұтас орта бөлшектерімен байланысқан координаталар жүйесін қарастырсақ, онда ол орта уақыт өтуіне байланысты өзгеруі мүмкін. Кез келген берілген уақыт мезгілінде осындай координаталар жүйесін таңдап алу өз еркімізде, бірақ келесі уақыт мезгілінде ол біздің еркімізге тәуелсіз, себебі координаталар жүйесі ортаға жабысып, «біртұтас болып» сонымен бірге деформацияланады. Тұтас ортаның барлық нүктелері қозғалыстағы ілеспелі координаталар жүйесімен салыстырғанда тыныштықта болады, себебі олардың координаталары ξ^1, ξ^2, ξ^3 ілеспелі жүйеде өзгермейді. Бірақ жүйенің өзі қозғалады, созылады, майысады (қисаяды).

Тұтас орта қозғалмайтын есептеу жүйесіне x^i-ге қатысты қозғалыста болсын деп есептейік. Ортамен бірге деформацияланатын және қозғалатын ілеспелі есептеу жүйесін (ξ^1, ξ^2, ξ^3) осы ортамен байланыстырайық. Абсолют қатты дененің кинематикасында сол денемен байланысқан ілеспелі жүйе бірге орын ауыстырады және бұрылады. Ал деформацияланатын қатты денемен байланысқан ілеспелі жүйе, тек қана орын ауыстырып және бұрылып қана қоймайды, сонымен қатар сол денемен бірге өзі де деформацияланады. Бұдан шығатын қорытынды, ξ^i жүйесі жалпы жағдайда қисық

сызықты болады. Абсолют қатты дене сияқты, тұтас ортаның қозғалысы толығымен ілеспелі координаталар жүйесінің қозғалысымен анықталады (деформациясы да ескеріледі).

$M(\xi^i)$ ортасының белгілі бір бөлшегін қарастырайық. Уақыт өтуіне байланысты ол өзінің орындарын санақ жүйесімен салыстырғанда өзгертеді, сондықтан бөлшектің координаталары x^i бұл жүйеде уақыттың функциясы болып табылады

$$x^i = x^i\left(\xi^j, t\right). \qquad (2.3)$$

(2.3) теңдеулерін **тұтас ортаның** M **бөлшегінің қозғалыс теңдеулері** деп атайды.

$x^i\left(\xi^j, t\right)$ функциясы өзінің туындысымен бірге үздіксіз және функциялық жағынан бір-біріне тәуелсіз деп ұйғарайық. Сондықтан t уақыттың кез келген мәнінде анықтауыш нольге тең емес

$$J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right| \neq 0.$$

Тұтас орта қозғалысын зерттегенде дифференциалдық және интегралдық есептеу аппаратына сүйенуге мүмкіндік беретін бұл жалпы ұйғарым. Сонымен қатар ортаны құрайтын материал физикалық қасиеттерге ие болады деген жорамал орынды. Бірақ бұл табиғи қасиеттерін әзірше қарастырмаймыз.

Егер ξ^j координаталары белгілі бір облыста өзгереді деп қабылдасақ, онда (2.3) теңдеулері осы облыстағы ортаның кез келген бөлшектерінің қозғалыс теңдеулері болады. Сол себепті (2.3) **тұтас орта қозғалысының теңдеулері** деп те аталынады. Ал абсолют қатты дененің теңдеуі (2.3)-тің дербес жағдайы болып саналады және қозғалыс теңдеулерінің оң жағы ξ^j айнымалысына қатысты сызықты болып келеді.

Тұтас орта қозғалысын зерттеу екі түрлі көзқарас арқылы жүзеге асады.

2.2. Тұтас ортаның қозғалысын зерттеу әдістері

2.2.1. Лагранж әдісі

Лагранж деп аталынатын көзқарас бойынша қозғалатын ортаның өзі, зерттелінетін объект болып табылады, дәлірек айтқанда, оның жеке бөлшектері материалдық нүкте ретінде қарастырылып олардың траекториялары зерттелінеді. Яғни, әрбір бөлшектің траекторияларын тапсақ, онда тұтас ортаның қозғалысы толық анықталады. Уақыт өтуімен байланысты ξ^k -мен белгіленген бөлшек қозғалысының әртүрлі тензорлық характеристикаларының өзгеруін және белгіленген уақыт мезгілінде ξ^k-дан келесі $\xi^k + d\xi^k$ орнына көшкендегі сол шамалардың өзгерістері қарастырылады. Басқаша айтқанда, тұтас орта қозғалысының тензорлық характеристикалары, ξ^k координатаның және t уақыттың функциялары ретінде беріледі. ξ^k, t **Лагранж айнымалары** деп аталады.

Атап айтатын нәрсе, тұтас орта қозғалысын зерттейтін Лагранж көзқарасы жеке материалдық бөлшектердің қозғалысымен байланысты болғандықтан, физикалық ұғымдар мен заңдардың негізінде жатады.

Орын ауыстыру векторы

Тұтас ортаның ξ^k нүктесіндегі бөлшектің t_0 және t_1 уақыт мезгіліне сәйкес келетін M_0 және M_1 орындары, $\vec{r}_0$ және $\vec{r}_1$ радиус-векторларымен анықталатын болсын. $\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0$ векторын **орын ауыстыру векторы** деп атайды. Осы анықтама бойынша орын ауыстыру векторының компоненттері қозғалыстағы бөлшектің координаталарымен төмендегідей формула арқылы байланысады

$$w^i = x^i - x_0^i \quad \text{немесе} \quad x^i = x_0^i + w^i\left(x^k, t\right).$$

Егер, ξ^k-ға сәйкес координаталар жүйесі бастапқы уақыт мезетіндегі санақ жүйесіне дәл келетіндей етіп таңдап алынса $x_0^i = \xi^i$, онда (2.3) теңдеуін былай жазуға болады

$$x^i = \xi^i + w^i\left(\xi^k, t\right).$$

Бұдан орын ауыстыру векторының компоненттері арқылы жазылған теңдеулер, жалпы тұтас ортаның қозғалыс теңдеулерін береді.

Жылдамдық векторы

Бөлшектің dt уақытындағы шексіз аз орын ауыстыруын $d\vec{w} = d\vec{r}$ қарастырайық. Осы орын ауыстыру векторының уақытқа қатынасы жылдамдық векторын береді

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = v^i\ \vec{э}_i,$$

мұндағы $\vec{э}_i$- санақ жүйесінің базистік векторлары, v^i- осы базистегі **жылдамдықтың компоненттері.**

$d\vec{r} = dx^i\vec{э}_i = dw^i\vec{э}_i$ болғандықтан, **жылдамдық компоненттері Лагранж айнымалылары** бойынша төмендегідей формуламен өрнектеледі

$$v^i(\xi^k, t) = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial w^i}{\partial t}. \qquad (2.4)$$

Ковариантты компоненттерді, контравариантты компоненттер арқылы өрнектеуге болады

$$v_j = g_{ji}v^i,$$

мұндағы ξ^k санақ жүйесінің метрикалық тензорының компоненттері - g_{ji}.

Қисық сызықты координаталар жүйесіндегі жылдамдықтың модулі

$$|\vec{v}| = \sqrt{g_{ji} v^i v^j} = \sqrt{g^{\ell m} v_\ell v_m}.$$

Үдеу векторы

Тұтас орта нүктесінің үдеуі дегеніміз, жылдамдықтан уақыт бойынша алынған меншікті туынды

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^i \vec{э}_i.$$

Жылдамдық векторын контравариантты компонент арқылы $\vec{v} = v^i \vec{э}_i$ түрінде жазып және t параметрі бойынша векторды дифференциалдау ережесін пайдаланып

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^k \Gamma^i_{jk} \qquad (2.5)$$

аламыз. Сол сияқты ковариантты компоненттер арқылы жазылған үдеудің өрнегі

$$a_\ell = \frac{\partial v_\ell}{\partial t} - v_j v^k \Gamma^j_{\ell k}. \qquad (2.6)$$

Орын ауыстыру арқылы жазылған үдеудің компоненттері

$$a^i = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} + \frac{\partial w^j}{\partial t}\frac{\partial w^k}{\partial t}\Gamma^i_{jk},$$

$$a_\ell = \frac{\partial^2 w_\ell}{\partial t^2} - \frac{\partial w_j}{\partial t}\frac{\partial w^k}{\partial t}\Gamma^j_{\ell k}. \qquad (2.7)$$

Тік бұрышты координаталар жүйесіндегі түрі

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2}.$$

2.2.2. Эйлер әдісі

Эйлердің есімімен аталатын екінші көзқарас бойынша зерттелетін объект тұтас ортаның өзі емес, жылжымалы ортамен толтырылған қозғалмайтын кеңістіктің әрбір нүктесінде болып жатқан құбылыстар. Уақыт өтуіне байланысты кеңістіктің белгіленген x^i нүктесіндегі ортаның әртүрлі тензорлық характеристикаларының өзгерістері және белгіленген уақыт мезетінде кеңістіктің басқа нүктелеріне ауысқан кездегі осы характеристикалардың өзгерістері зерттелінеді. Басқаша айтқанда, қозғалыстың әртүрлі характеристикалары x^i нүктелерінің және t уақыт координаталарының функциясы ретінде қарастырылады. x^1, x^2, x^3, t айнымалылары **Эйлер айнымалылары** деп аталады. Сонымен, Эйлердің көзқарасы бойынша, зерттеу объектісі ортаның қозғалысын сипаттайтын мысалы, жылдамдықтың өрісі, үдеудің өрісі, тығыздықтың өрісі және т.б. әртүрлі тензорлық өрістер болып табылады.

Орын ауыстыру векторының өрісі

Эйлер айнымалылары бойынша орын ауыстыру векторының компоненттері мынадай формулалармен анықталады

$$\vec{w} = w^i \, \vec{э}_i, \qquad w^i\left(x^i, t\right) = x^i - x_0^i.$$

Егер орын ауыстыру векторы әрбір нүктеде уақытқа тәуелсіз, яғни $w^i(x^i)$ болса, онда орын ауыстыру өрісі **стационар**, ал орын ауыстыру векторы әрбір нүктеде уақытқа тәуелді, яғни $w^i(x^i, t)$ болса, **стационар емес** деп аталады.

Белгіленген уақыт мезгілінде, кеңістіктің бір нүктесінен екінші нүктесіне өткенде өріс векторының **өзгерісі векторлық градиентпен** сипатталады

$$\nabla\vec{w} = \nabla_i w_j \, \vec{э}_i \vec{э}_j.$$

Егер осы вектордың градиенті барлық нүктелерде нольге тең болса өріс **біртекті,** ал нольден өзгеше болса **өріс бір текті емес** деп аталынады.

Жылдамдық векторының өрісі

Жылдамдық векторының өрісін $\vec{v} = \vec{v}(x^i, t)$ қарастырайық. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық компоненттерінің мәндерін (2.4) формуласынан аламыз, егер оған тұтас орта қозғалысы теңдеулерінің ауысу негізінде алынған Лагранж координаталарының өрнегін $\xi^k = \xi^k(x^i, t)$ формулалары бойынша қойсақ, онда

$$\vec{v} = v^i\ \vec{э}_i, \qquad v^i(x_i, t) = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\xi_j = \xi_j(x^k, t)}.$$

Егер өрістің әрбір нүктесінде жылдамдық векторы t уақытқа тәуелсіз $\vec{v} = \vec{v}(x^i)$ немесе $v^i = v^i(x_i)$ болса, онда жылдамдық өрісін стационар, ал ортаның қозғалысын **қалыптасқан** деп атайды. Жалпы жағдайда, егер жылдамдық әрі координатаға, әрі уақытқа тәуелді болса $\vec{v} = \vec{v}(x^i, t)$, онда жылдамдық өрісін стационар емес, ал ортаның қозғалысын **қалыптаспаған** дейді.

Үдеу векторының өрісі

Бөлшектің үдеуі жылдамдық векторынан уақыт бойынша алынған толық туындымен анықталады

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Келтірілген теңдеу векторлық теңдеу болып табылады. Бұл теңдеуді компоненттері арқылы былай жазамыз

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j \cdot \nabla_j\right) v^i,$$

$$a_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \left(v_j \cdot \nabla^j\right) v_k. \qquad (2.8)$$

Жылдамдықтан уақыт бойынша алынған дербес туынды $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ **локальдық үдеу** делінеді және ол кеңістіктің қозғалмайтын әрбір нүктесіндегі жылдамдықтың өзгерісін сипаттайды. Үдеудің өрнегіндегі екінші мүше $\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}$ – **конвективтік үдеу** делінеді, ол кеңістіктің бір нүктесінен көрші нүктесіне ауысқандағы жылдамдықтың өзгерісін сипаттайды.

Егер жылдамдық өрісі стационар болса, онда локальдық үдеу нольге тең. Жылдамдық өрісі біртекті болған жағдайда, конвективтік үдеу нольге айналады. Сонымен локальдық үдеу жылдамдық өрісінің стационар еместігін, ал конвективті үдеу – оның біртекті еместігін сипаттайды.

2.2.3. Лагранж және Эйлер әдістерінің өзара байланысы

Математикалық тұрғыдан қарағанда Лагранж және Эйлер әдістерінің бір-бірінен айырмашылығы, екі түрлі координаталар жүйесінде қарастырылады, бірақ олардың арасындағы байланысты табуға болады.

Тұтас ортаның қозғалысы **Лагранж айнымалылары** арқылы белгілі болсын. Олай болса орын ауыстырудың, жылдамдықтың, үдеудің, температураның мәндері, сонымен қатар қозғалыстың теңдеуі және т.б. **Лагранж айнымалыларының функциясы** ретінде анықталды дейміз

$$\vec{w} = \vec{w}(\xi^k, t), \quad \vec{v} = \vec{v}(\xi^k, t), \quad T = T(\xi^k, t),$$
$$x^i = x^i(\xi^k, t) \qquad \text{және т.б.}$$

Эйлер айнымалыларына өту үшін $\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right|$ нольден өзгеше болса, онда қозғалыс теңдеуін ξ^k айнымалыларына қатысты шешуге болады. Лагранж координаталарының мәндерін

$$\xi^k = \xi^k(x^i, t)$$

жоғарғы формулаларға қойып орын ауыстыру, жылдамдық, температура және т.б. Эйлер айнымалыларының функциясы ретінде табамыз:

$$\vec{w} = \vec{w}(x^i, t), \qquad \vec{v} = \vec{v}(x^i, t), \quad T = T(x^i, t) \qquad \text{және т.б.}$$

“A” шамасын Лагранж айнымалылары бойынша дифференциалдаудан, осы шаманы Эйлер айнымалылары бойынша дифференциалдауға көшу үшін төмендегі тәуелділікті пайдаланамыз

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}, \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V^k \frac{\partial A}{\partial x^k}.$$

Соңғы теңдеу уақыт бойынша толық және локальдық туындының арасындағы байланысты көрсетеді. Сонымен, Лагранж айнымалылары арқылы берілген қозғалыстан Эйлер айнымалылары түріндегі қозғалысқа өту, айқындалмаған функцияны шешуге келіп саяды.

Керісінше, ортаның қозғалысы Эйлер айнымалылары арқылы берілсін, яғни ортаның барлық характеристикалары, соның ішінде жылдамдық x^i, t айнымалыларының функциясы ретінде белгілі болсын. Онда жылдамдық компоненттерін анықтайтын теңдеуді

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \qquad (i = 1,2,3)$$

x^i функциясына қатысты сызықты үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі ретінде қарастыруға болады. Осы теңдеулер жүйесін интегралдап, x^i шамасын t және үш тұрақтыларының C_1, C_2, C_3 функциясы ретінде табамыз

$$x^i = x^i\left(t, C_1, C_2, C_3\right).$$

Тұрақты сандардың мәндері бастапқы шарттардан ($t = t_0$ болғанда $x = x_0$) анықталады. Олай болса, бұл тұрақтылар тұтас ортаның нүктесін жекелейтін параметрлер Лагранж айнымалылары болып табылады. Сонымен, осы дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу арқылы ортаның қозғалыс заңы табылады. Оның көмегімен барлық формулалардан $\vec{w}$, $\vec{v}$, T және т.б. таралуларын анықтайтын Лагранж айнымалыларына көшуге болады. Яғни Эйлер айнымалыларынан Лагранж айнымалыларына өту дифференциалдық теңдеулерді интегралдаумен байланысты болады.

Бұдан шығатын қорытынды, тұтас орта қозғалысын анықтау Лагранж және Эйлер көзқарасы бойынша бір-біріне эквивалентті. Сондықтан ортаның түріне қарай тиісті әдістерді пайдаланған жөн.

Гидромеханика саласында көбінесе Эйлер әдісін қолданады, себебі сұйықтың шекаралық қозғалысы мен формасы берілген деп есептелінеді. Гидромеханикада ізделінетін шамалар тұтас орта бөлшектерінің орын ауыстыруы емес, олардың жылдамдықтары, ал жылдамдықтарына байланысты шекаралық шарттары тұжырымдалады. Осының бәрі бөлшектердің әрқайсысының қозғалысын қадағаламай, сұйық толтырылған кеңістіктегі тек жылдамдықтардың таралуына назар аударуға мүмкіндік береді және әрбір уақыт мезетінде осы нүктеден өтіп жатқан бөлшектердің өздеріне тәуелсіз болады. Осындай жағдайларға Эйлер айнымалыларын пайдаланатын математикалық аппарат қолайлы.

Серпімділік теориясындағы түпкі мақсат – бастапқы формасы, бекіту шарты және жүктемесі берілген серпімді дене бөлшектерінің орын ауыстыруын анықтау. Сонымен қатар орын ауыстыруы айқын емес, денені шектеп тұрған беттің әрбір аудандарының түрін де анықтау керек. Басқаша айтқанда серпімділік теориясындағы шектік есептерді шешу үшін, шекарадағы шарттар беріледі, ал шекараның формасы жалпы айтқанда ізделініп отырған шамаларға тәуелді. Сондықтан бұл жағдайда Лагранж әдісі қолайлы. Себебі, дененің деформацияға дейінгі шекаралық теңдеуі, деформациядан кейінгі шекаралық теңдеуімен бірдей болады.

Есептер мен жаттығулар

1. Тұтас орта қозғалысының заңы Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 \cos kt - \xi_2 \sin kt, \quad x_2 = \xi_1 \sin kt + \xi_2 \cos kt,$$
$$x_3 = \xi_3.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдықтар мен үдеулердің өрістерін анықтаңыз.

Шешуі. Жылдамдық векторының компоненттері Лагранж айнымалылары бойынша мына формуламен $v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{\xi_k}$ анықталады, яғни

$$v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{\xi_k} = -k\xi_1 \sin kt - k\xi_2 \cos kt,$$

$$v_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)_{\xi_k} = k\xi_1 \cos kt - k\xi_2 \sin kt, \quad v_3 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)_{\xi_k} = 0.$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 қатысты қозғалыс заңының шешімін табайық

$\xi_1 = x_1 \cos kt + x_2 \sin kt$, $\xi_2 = -x_1 \sin kt + x_2 \cos kt$, $\xi_3 = x_3$.
Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық векторының компоненттері

$$v_1 = -k\,x_2, \qquad v_2 = k\,x_1, \qquad v_3 = 0.$$

$a_i = \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ формуласы арқылы Эйлер айнымалылары түріндегі үдеу векторының компоненттерін анықтайық, яғни

$$a_1 = -k^2 x_1, \qquad a_2 = -k^2 x_2, \qquad a_3 = 0.$$

2. Тұтас орта қозғалысының заңдылығы берілген

$$x_1 = \xi_1, \qquad x_2 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t},$$

$$x_3 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t - \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t}.$$

Лагранж айнымалылары түріндегі жылдамдық және үдеу компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $v_1 = 0$, $\quad v_2 = \dfrac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t - \dfrac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t}$,

$$v_3 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t},$$

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t},$$

$$a_3 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t - \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t}.$$

3.Тұтас орта қозғалысының теңдеулері Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 e^{k_1 t}, \qquad x_2 = \xi_2 e^{k_2 t}, \qquad x_3 = \xi_3 e^{k_3 t}.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдықтардың өрісін анықтаңыз.

Жауабы. $v_1 = k_1 x_1, \quad v_2 = k_2 x_2, \quad v_3 = k_3 x_3.$

4. Жылдамдықтар өрісі берілген

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \qquad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \qquad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

Эйлер және Лагранж айнымалылары түріндегі үдеулердің компоненттерін табыңыз.

Жауабы. $a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{2x_2}{(1+t)^2}, \quad a_3 = \dfrac{6x_3}{(1+t)^2};$

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 2\xi_2, \qquad a_3 = 6\xi(1+t).$$

5. Тұтас ортаның қозғалыс заңы Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3\left(e^t - 1\right), \quad x_2 = \xi_3\left(e^t - e^{-t}\right) + \xi_2, \quad x_3 = \xi_3.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $v_1 = x_1 + x^3, \quad v_2 = x^3\left(e^t - e^{-t}\right), \quad v_3 = 0.$

6. Тұтас ортаның қозғалысы Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 + \xi_3\left(a^2 - 1\right), \quad x_2 = \xi_2 + \xi_3\left(a^2 - a^{-2}\right), \quad x_3 = a^2\xi_3,$$

мұндағы a - тұрақты. J якобианы нольден өзгеше екендігін дәлелдеңіз және Эйлер айнымалылары түріндегі қозғалыс заңын табыңыз.

Жауабы. $J = \left|\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right| = a^2 \neq 0$,

$$\xi_1 = x_1 + x_3\left(a^{-2} - 1\right), \quad \xi_2 = x_2 + x_3\left(a^{-4} - 1\right), \quad \xi_3 = a^{-2}x_3.$$

7. $\vec{w}_1 = \left(3\xi_2 - 4\xi_3\right)\vec{i} + \left(2\xi_1 - \xi_3\right)\vec{j} + \left(4\xi_2 - \xi_1\right)\vec{k}$ векторының өрісінде тұтас ортаның белгілі бір көлемі орын ауыстырсын. Материалдық және кеңістіктік осьтер бір-бірімен беттеседі деп есептеп, A (1,0,3) және B (3,6,6) бөлшектерін қосатын вектордың ығысқан орнын анықтаңыз.

Шешуі. Егер материалдық (ілеспелі) және кеңістіктік (инерциялық) координаталар жүйелері бір-бірімен беттессе, онда орын ауыстыру векторының компоненттерінің түрі

$$w_i = x_i - \xi_i.$$

Кеңістіктік координаталары мынаған тең

$$x_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3, \qquad x_2 = 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3,$$

$$x_3 = -\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3.$$

Сонымен ығысқан жағдайдағы A бөлшегінің координаталары $x_1 = -11$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, ал B бөлшегінің координаталары $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 27$. Осы ығысқан жағдайдағы A және B бөлшектерін қосатын вектордың түрі

$$\vec{AB} = 8\vec{i} + 7\vec{j} + 25\vec{k}.$$